Ασκήσεις στη Συνδυαστική Ανάλυση 2015/2016

Άσκηση 1: Στον κώδικα Morse, μια λέξη μήκους *N* αποτελείται από μια σειρά *N* χαρακτήρων καθένας από τους οποίους είναι ένα από τα σύμβολα, τελεία (.) ή παύλα (-). Είναι παραδεκτές λέξεις που αποτελούνται μόνο από τελείες ή μόνο από παύλες. Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν;

Άσκηση 2: Ένας φοιτητής διαβάζει 0 ή 1 ή 2 ώρες την ημέρα το μάθημα των «Πιθανοτήτων».

α) Να κατασκευαστεί δενδρόγραμμα το οποίο θα περιγράφει την ενασχόληση του φοιτητή με το μάθημα των «Πιθανοτήτων» σε τρείς διαδοχικές μέρες.

β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να αφιερώσει ο φοιτητής 5 συνολικά ώρες για τη μελέτη του μαθήματος των «Πιθανοτήτων» σε τρείς διαδοχικές μέρες;

γ) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να αφιερώσει ο φοιτητής συνολικά τουλάχιστον 5 ώρες για τη μελέτη του μαθήματος των «Πιθανοτήτων» σε τρείς διαδοχικές μέρες;

Άσκηση 3: Στο τυχερό παιχνίδι ΤΖΟΚΕΡ κληρώνονται πέντε διαφορετικοί αριθμοί από το 1 έως το 45 χωρίς να έχει σημασία η σειρά κλήρωσης των αριθμών. Κληρώνεται επίσης ο αριθμός τζόκερ από το 1 έως το 20 ο οποίος μπορεί να συμπίπτει με κάποιον από τους 5 αρχικούς αριθμούς. Οι αριθμοί που κληρώνονται αποτελούν τη νικήτρια στήλη του παιχνιδιού. Ένας παίκτης συμπληρώνει μία στήλη, όταν επιλέγει πέντε διαφορετικούς αριθμούς από το 1 έως το 45 και έναν ακόμη αριθμό τζόκερ από το 1 έως το 20. Να υπολογιστούν τα εξής:

1) Ο αριθμός των στηλών που πρέπει να συμπληρώσει ένας παίκτης ώστε να είναι απόλυτα σίγουρος ότι θα πετύχει τη νικήτρια στήλη σε κάθε περίπτωση. (Απάντηση: 24.435.180)

2) Τον αριθμό των στηλών που πρέπει να συμπληρώσει κάποιος παίκτης ώστε να είναι απόλυτα σίγουρος ότι θα πετύχει τη νικήτρια στήλη στην περίπτωση που στην κλήρωση θα συμβούν ταυτόχρονα οι παρακάτω καταστάσεις α) και β):

α) Από τους 5 αρχικούς αριθμούς ο ένας είναι μεταξύ του 1 και του 10, ο δεύτερος μεταξύ του 11 και του 20, ο τρίτος μεταξύ του 21 και του 30, ο τέταρτος μεταξύ του 31 και του 40 και ο πέμπτος μεταξύ του 41 και του 45.
β) Ο αριθμός τζόκερ είναι άρτιος.

(Απάντηση: 500.000 στήλες)

Άσκηση 4: *N* φοιτητές πρόκειται να τοποθετηθούν σε *N* καθίσματα. Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους *N* φοιτητές στις *N* θέσεις σε σειρά με την προϋπόθεση ότι μεταξύ δύο συγκεκριμένων από αυτούς πρέπει να κάθονται υποχρεωτικά ακριβώς *k* φοιτητές. Ποιό το αποτέλεσμα της άσκησης για N=10, k=3;

(Απάντηση: 483840, για N=10, k=3).

Άσκηση 5: Τέσσερα παντρεμένα ζευγάρια έχουν αγοράσει οκτώ εισιτήρια θεάτρου που αντιστοιχούν σε οκτώ διαδοχικές θέσεις της ίδιας σειράς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα οκτώ άτομα στις θέσεις έτσι ώστε:
α) να μην υπάρχει κανένας περιορισμός σχετικά με τη θέση που καταλαμβάνει το κάθε άτομο.
β) Άντρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ.
γ) όλοι οι άνδρες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις και όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις.
δ) όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις

(Απάντηση: $8!$, $2.(4!)^2$, $2.(4!)^2$, $5!.4!$)